~ CURS 4 ~

III. Regim permanent sinusoidal (curent alternativ)

În regim dinamic, circuitele electrice liniare sunt descrise de ecuaţii integro-diferenţiale. Tensiunile şi curenţii electrici sunt, în general, funcţii de timp de o clasă largă. O clasă simplă de funcţii de timp de mare importanţă în studiul regimurilor circuitelor electrice o constituie funcţiile sinus şi cosinus, denumite generic ***funcţii sinusoidale***.

Regimul permanent sinusoidal reprezintă o importanţă deosebită, teoretică şi practică şi intervine atât în producerea, transmiterea şi utilizarea energiei electrice, cât şi în telecomunicaţii, semnalizări şi automatizări.

III.1. Mărimi sinusoidale

În general, o mărime sinusoidală poate fi prezentată sub forma:

$$m(t) = M_{max}\sin(\omega t + \alpha) = M\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha), \qquad (3.1)$$

relaţie în care apar câteva mărimi cu următoarele semnificaţii:

- X_{max} – poartă denumirea de *amplitudine* sau *valoare de vârf*, reprezentând valoarea maximă pe care o atinge funcţia sinusoidală în decursul unei perioade;
- X – este *valoarea efectivă* sau *eficace*. Între aceste două mărimi există relaţia $X_{max} = X\sqrt{2}$. În plus, valoarea efectivă este foarte importantă deoarece ea este cea indicată de aparatele de măsură.
- ω – este pulsaţia; între pulsaţie şi frecvenţă (sau perioadă) există relaţia:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (3.2)$$

- α – este faza iniţială a mărimii sinusoidale.

O reprezentare mai bună a mărimilor ce formează o funcţie sinusoidală, cu semnificaţiile lor fizice, este dată de figura 3.1:

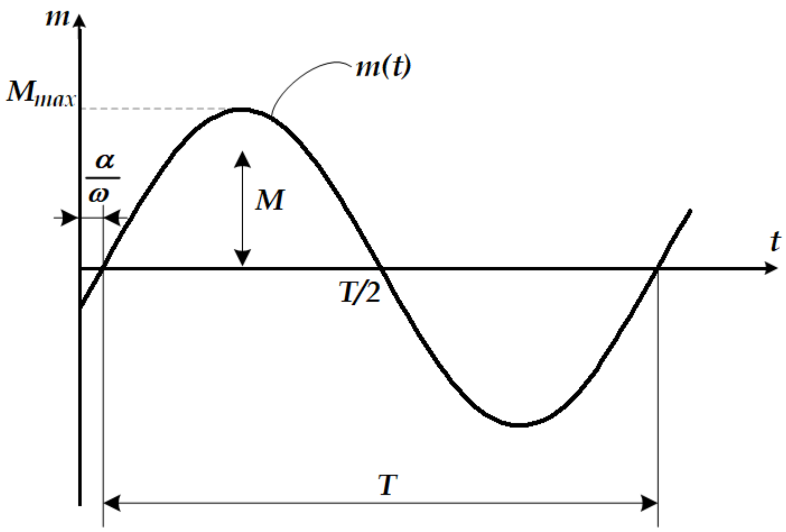


Fig. 3.1. Mărimi şi valori caracteristice ale unei funcţii sinusoidale

III.2. Metoda analitică a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale

Calculul regimului permanent sinusoidal se poate simplifica substanțial când mărimile sinusoidale cu care se lucrează sunt de aceeași frecvență, dacă se utilizează metoda simbolică (analitică) a reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale.

$$m(t) = M\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\alpha) \leftrightarrow \underline{M} = M\cdot e^{j\cdot\alpha} = M\cdot(\cos\alpha + j\cdot\sin\alpha) \qquad (3.3)$$

Unei mărimi sinusoidale îi corespunde o reprezentare în complex și reciproc:

$$\underline{X} = \mathrm{a} + \mathrm{j}\cdot\mathrm{b} \leftrightarrow x(t) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\omega t + \mathrm{arctg}\frac{b}{a}\right) \qquad (3.4)$$

În figura 3.2 este reprezentat acest număr complex.

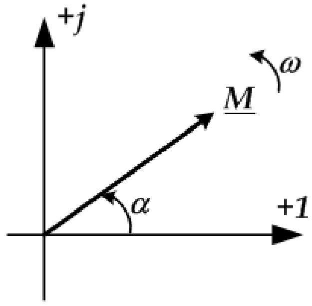
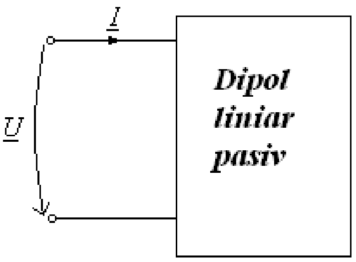


Fig. 3.2. Reprezentare în complex a unei mărimi

III.3. Imitanțe complexe

Pentru un dipol liniar pasiv (fig. 3.3), la bornele căruia se cunosc tensiunea și intensitatea curentului electric, se poate defini *impedanța complexă a dipolului* ca raportul dintre cele două mărimi mai sus amintite:



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U\cdot e^{j\beta_U}}{I\cdot e^{j\beta_I}} = Z\cdot e^{j(\beta_U-\beta_I)} =$$
$$Z\cdot e^{j\varphi} = Z\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) =$$
$$= Z\cdot\cos\varphi + j\cdot Z\cdot\sin\varphi = R + j\mathrm{X} \qquad (3.5)$$

Fig. 3.3. Dipolul liniar pasiv

În relația de mai sus mărimile introduse au următoarele denumiri:

$\underline{Z}$ - impedanța complexă;

R – rezistență [Ω];

X - reactanță [Ω].

Prin inversarea impedanței complexe se obține:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{Z\cdot e^{j\varphi}} = \frac{1}{R+jX} = G - jB \qquad (3.6)$$

În care se definesc următoarele mărimi:

$\underline{Y}$ - admitanță complexă;

G - conductanță [S];

B – susceptanță [S].

III.4. Puteri în regim permanent sinusoidal

Spre deosebire de regimul de curent continuu (unde aveam de-a face doar cu puterea electrică activă), în regim permanent sinusoidal întâlnim mai multe tipuri de puteri electrice.

Puterea instantanee – *p*, se definește ca puterea primită în fiecare moment la borne de un dipol și se calculează ca produsul dintre valorile instantanee ale tensiunii și curentului electric, conform formulei:

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=UI\cdot\left[\cos\left(\varphi_{\mathrm{U}}-\varphi_{\mathrm{I}}\right)-\cos\left(2\omega t+\varphi_{\mathrm{U}}+\varphi_{\mathrm{I}}\right)\right] \qquad (3.7)$$

În această formulă se pot deosebi doi termeni: un termen constant ce caracterizează schimbul mediu de putere al dipolului cu exteriorul și un termen alternativ de frecvență dublă față de cea a tensiunii aplicate.

Puterea activă – *P*, se poate defini ca valoarea medie a puterii instantanee pe durata unei perioade:

$$P=\langle p\rangle=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}p(t)dt=UI\cos\left(\varphi_{\mathrm{U}}-\varphi_{\mathrm{I}}\right)=U\cdot I\cdot\cos\varphi \qquad [\mathrm{W}] \qquad (3.8)$$

Puterea activă este caracteristică rezistoarelor, având ca unitate de măsură watt-ul (W):

$$P=R\cdot I^2=G\cdot U^2 \qquad (3.9)$$

Puterea reactivă – *Q*, se definește prin analogie cu puterea activă:

$$Q=U\cdot I\cdot\sin\varphi \qquad [VAr] \qquad (3.10)$$

Spre deosebire de puterea activă, puterea reactivă își schimbă semnul în funcție de defazajul unghiului φ. Cum am mai discutat anterior, $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ în funcție de regimul de funcționare a dipolului. Astfel, în acest interval $\cos\varphi$ este întotdeauna pozitiv, în timp ce $\sin\varphi$ poate avea și valori pozitive și negative.

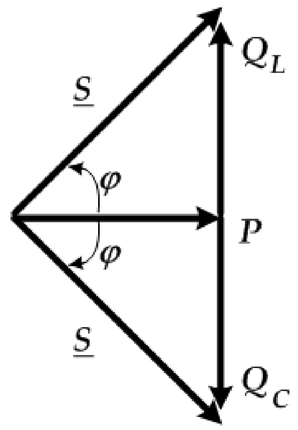
Puterea aparentă – *S*, se definește ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului, având ca unitate de măsură volt-amperul (VA):

$$S=U\cdot I \qquad [\mathrm{VA}] \qquad (3.11)$$

Puterea aparentă poate fi exprimată ca și celelalte două și în funcție de imitanțele dipolului liniar pasiv:

$$S=Z\cdot I^2=Y\cdot U^2 \qquad (3.12)$$

Puterea aparentă poate fi considerată ca fiind un indicator al funcționării circuitului pentru maximul puterii active (regimul pur rezistiv – $\varphi = 0$) sau al puterii reactive (regimul pur inductiv – $\varphi = \pi/2$). Astfel, putem defini triunghiul puterilor activă, reactivă și aparentă (fig. 1.29):



$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\
P &= S \cdot \cos\varphi \\
Q &= S \cdot \sin\varphi
\end{aligned}
\qquad (3.13)
$$

Fig. 3.4. Triunghiul puterilor

Putem defini o mărimi foarte importantă din punct de vedere energetic, *factorul de putere*, k_p, ce este raportul dintre puterea activă și cea aparentă:

$$k_p = \frac{P}{S} = \frac{S \cdot \cos\varphi}{S} = \cos\varphi \in [0,1] \qquad (3.14)$$

Corespondentul acestor puteri în domeniul complex este ***puterea aparentă complexă***, $\underline{S}$, definită ca produsul între valoarea în complex a tensiunii la bornele dipolului și valoarea în complex conjugată a intensității curentului electric:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = P + jQ \qquad (3.15)$$

relație din care putem observa ca partea reală a puterii aparente este egală cu puterea activă, iar partea imaginară este egală cu puterea reactivă:

$$
\begin{aligned}
|\underline{S}| &= S \\
P &= \mathrm{Re}\{\underline{S}\} \\
Q &= \mathrm{Im}\{\underline{S}\}
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

III.5. Elemente de circuit în regim permanent sinusoidal

În regim permanent sinusoidal există atât elemente de circuit pasive, reprezentate de rezistoare, bobine și condensatoare, cât și elemente active, reprezentate de sursele de curent și de tensiune.

a) Rezistorul ideal

Rezistorul electric are aceeași reprezentare ca și în curent continuu, în figura 3.5. fiind exemplificat atât în domeniul timp (a), cât și în complex (b).

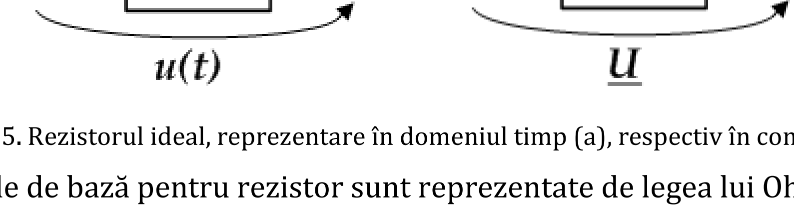


Fig. 3.5. Rezistorul ideal, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relațiile de bază pentru rezistor sunt reprezentate de legea lui Ohm:

$u(t) = R \cdot i(t)$ - ecuația de funcționare în domeniul timp;
$\underline{U} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}, \quad \underline{Z}_R = R$ - ecuația de funcționare în domeniul complex. (3.17)

Cum rezistenţa unui rezistor este un număr real, pozitiv, trebuie remarcat faptul că **rezistorul nu introduce defazaj între tensiune şi curent** (fig. 3.6).

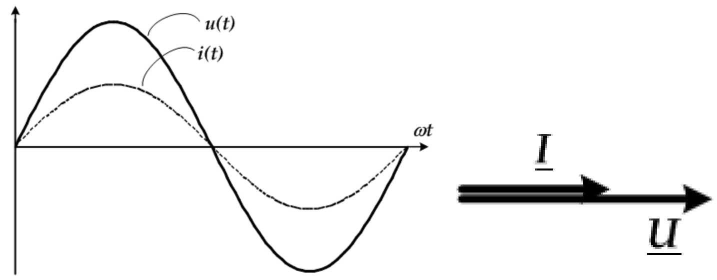


Fig. 3.6. Defazajul între tensiune şi curent pentru un rezistor ideal

Pentru calculul puterii active consumate de către un rezistor ideal, trebuie avut în vedere că valoarea curentului ce intervine in formulă este valoarea efectivă:

$$P = R \cdot I^2 > 0 \text{ (putere activă consumată), } [P]_{\text{S.I.}} = 1\,\text{W} \tag{3.18}$$

b) Bobina electrică

Bobina electrică este un element de circuit constituit dintr-un conductor înfăşurat într-un număr de spire. Mărimea caracteristică poartă denumirea de inductivitate (inductanţă) a cărei unitate de măsură în SI este *Henry*-ul (H). Inductivitatea este dependentă de numărul de spire, de lungimea conductorului şi de proprietăţile magnetice ale miezului bobinei. În circuitele electrice, bobina este reprezentată ca în figura 3.7, (a) în domeniul timp, respectiv (b) în domeniul complex.

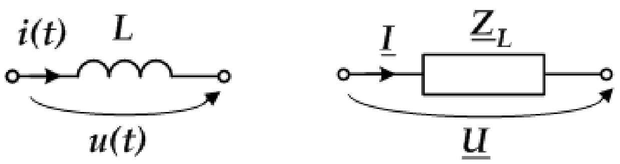


Fig. 3.7. Bobina ideală în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relaţiile de bază pentru bobină sunt:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} && \text{- ecuaţia de funcţionare în domeniul timp;} \\ \underline{U} &= j\omega \cdot L \cdot \underline{I} = \underline{Z}_{\mathrm{L}} \cdot \underline{I} && \text{- ecuaţia de funcţionare în domeniul complex.} \end{aligned} \tag{3.19}$$

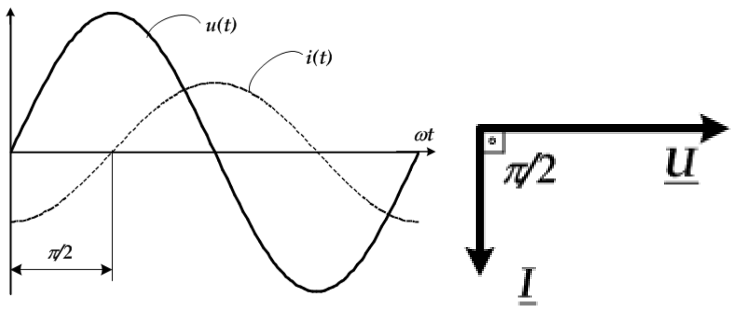


Fig. 3.8. Defazajul între tensiune şi curent pentru o bobină ideală

Mărimea ω*L* poartă denumirea de *reactanţă inductivă*: $X_L = \omega L$ [Ω]. Inductivitatea şi pulsaţia unei bobine sunt numere reale, pozitive, deci şi reactanţa este tot pozitivă.

Numărul complex $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, deci $\underline{U} = \underline{Z}_{\mathrm{L}} \cdot \underline{I} = j\omega \cdot L \cdot \underline{I} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}$, ceea ce face ca **bobina să defazeze curentul cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii** (fig. 3.8).

Bobina electrică consumă putere reactivă, Q (având ca unitate de măsură în sistemul internațional **var – volt-amper reactiv**), iar formula de calcul este următoarea (*în care trebuie ținut cont că valoarea curentului electric ce apare în formulă este valoarea efectivă*):

$$Q = \omega L \cdot I^2 > 0 \text{ (putere reactivă consumată) } [Q]_{\mathrm{S.I.}} = 1 \text{ var} \tag{3.20}$$

c) Condensatorul electric

Condensatorul electric este un dispozitiv format din două armături conductoare încărcate cu sarcini electrice egale și de semn contrar, între care este plasat un dielectric. Mărimea ce caracterizează condensatorul poartă denumirea de capacitate electrică (unitatea de măsură în SI este *Farad*-ul) și este dependentă de dimensiunile geometrice ale armăturilor, de poziția lor relativă și de proprietățile dielectricului. În circuitele electrice, condensatorul este reprezentat ca în figura 3.9, (*a* - în domeniul timp, *b* - în domeniul complex).

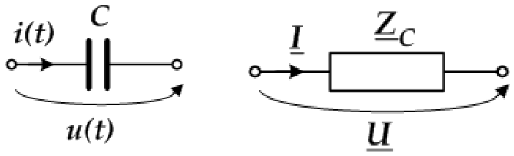


Fig. 3.9. Condensatorul electric, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Relațiile de bază pentru condensatorul electric sunt:

$$i(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{- ecuația de funcționare în domeniul timp;}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I} = \underline{Z}_{\mathrm{C}} \cdot \underline{I} \quad \text{- ecuația de funcționare în domeniul complex.} \tag{3.21}$$

Mărimea $\frac{1}{\omega C}$ poartă denumirea de *reactanță capacitivă*: $X_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\omega C}$ [Ω]. Capacitatea unui condensator și pulsația sunt numere reale, pozitive, deci și reactanța este tot pozitivă. Numărul complex $\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$,deci $\underline{U} = \underline{Z}_{\mathrm{C}} \cdot \underline{I} = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \underline{I} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}$, astfel încât **condensatorul defazează curentul cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii** (fig. 3.10).

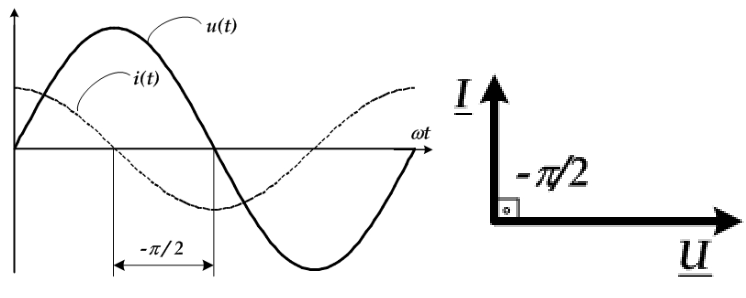


Fig. 3.10. Defazajul între tensiunea şi curentul pentru o condensator electric

Condensatorul electric „produce” putere reactivă (în bilanțul puterilor puterea reactivă de la condensator va apărea în cadrul puterii consumate cu semnul minus), Q, iar formula de calcul este următoarea (*în care trebuie ținut cont că valoarea curentului electric ce apare în formulă este valoarea efectivă*):

$$Q = -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2 < 0 \text{ (putere reactivă produsă) } [\mathrm{Q}]_{\mathrm{S.I.}} = 1 \text{ var} \qquad (3.22)$$

d) Elemente active de circuit

În categoria elementelor active de circuit intră sursele de energie electrică, sursa ideală de tensiune, respectiv sursa ideală de curent.

d1)Sursa ideală de tensiune se caracterizează prin faptul că indiferent de configurația circuitului acesta oferă la bornele sale o tensiune constantă *u(t)* egală cu valoarea tensiunii generatorului *e(t)* (fig. 3.11).

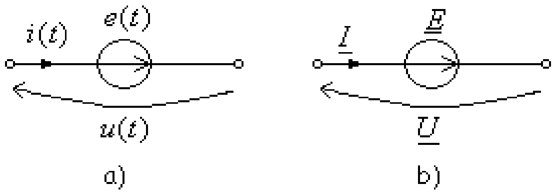


Fig. 3.11. Sursa ideală de tensiune, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Ecuațiile caracteristice în domeniul timp și în domeniul complex (conform regulii generatorului) sunt:

$$u(t) = e(t) \qquad \underline{U} = \underline{E} \qquad (3.23)$$

d2) Sursa ideală de curent se caracterizează prin faptul că indiferent de configurația circuitului, aceasta injectează în circuit un curent a cărui valoare constantă *i(t)* este egală cu valoarea curentului generatorului *j(t)* (fig. 3.12).

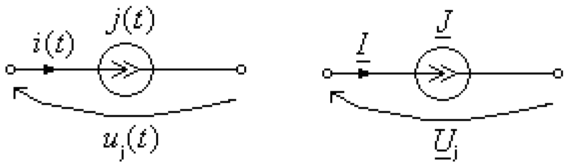


Fig. 3.12. Sursa ideală de curent, reprezentare în domeniul timp (a), respectiv în complex (b)

Ecuația caracteristică atât în domeniul timp, cât și in complex este:

$$i(t) = j(t) \qquad \underline{I} = \underline{J} \qquad (3.24)$$

Puterea aparentă complexă generată de sursele de tensiune, respectiv de curent (considerând regula de la generatoare), sunt date de relațiile:

$$\underline{S}_{\mathrm{e}} = \underline{E} \cdot \underline{I}^* \quad \text{- pentru sursa de tensiune;}$$
$$\underline{S}_{\mathrm{j}} = \underline{U}_{\mathrm{j}} \cdot \underline{J}^* \quad \text{- pentru sursa de curent.} \qquad (3.25)$$